Prof. Dr. Alfred Toth

Die Zahl als Ding oder als Verhältnis

1. Die Zahl als Ding

Am Anfang von Landaus berühmter Analysis wird die Zahl schlicht mit einem Objekt identifiziert. Man erkennt hier einerseits natürlich den Einfluß der nicht weit zurückliegenden axiomatisierten Mengenlehre. So heißt es am Anfang von Hausdorffs berühmten Buch: "Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding" (1914, S. 1), wo sogar die Abstraktion, d.h. die Zusammenfassung von Objekten, fälschlicherweise als Objekt bezeichnet wird. Andererseits erkennt man allerdings auch, wie weit man noch mit einer kategorietheoretischen Begründung der Mathematik entfernt ist: "Wir nehmen als gegeben an: Eine Menge, d.h. Gesamtheit, von Dingen, natürliche Zahlen genannt" (Landau 1930, S. 1).

Dabei war man in der Arithmetik schon sehr lange vor Landau viel differenzierter. Ich zitiere aus einem Standardwerk aus dem ersten Drittel des 19. Jhs.

> Haben, oder denken wir uns irgend eine Vereinigung, oder Menge gleicher Dinge, und wollen diese durch Worte versinnlichen, so ist es nöthig, selbe mit etwas Bekanntem zu vergleichen.
>
> Man nehme daher irgend einen bestimmten, bekannten, jedoch ganz beliebigen Theil an, und diesen nenne man die Einheit. Dann ist es nöthig, anzugeben, wie oft diese Einheit in der Menge, von der es sich handelt, enthalten sey, d. h. wie oft man diese Einheit wird nehmen müssen, um ein dieser Menge gleiches Ganze hervorzubringen. Dieß, wie oftmal, ist es, was wir Zahl nennen. Zahlen sind daher Ausdrücke bestimmter Mengen.
>
> Zur genauen Vorstellung von der Größe eines Dinges, anders als durch das bloße Auffassen mit den Sinnen, gehört demnach die Kenntniß des *einen Theiles* (der Einheit) und die der Zahl, d. h. wie oft die gegebene Menge diese Einheit enthält.

(Minsinger 1832, S. 6).

Danach ist eine Zahl also die Anzahl des Auftretens eines als Einheit gesetzten Objektes aus einer Menge "gleicher" Objekte. In Sonderheit wird somit nicht zwischen Zahl und Anzahl differenziert.

2. Die Zahl als Verhältnis

Es dürfte einzigartig sein, daß ausgerechnet die Mathematik zu den Wissenschaften gehört, bei denen abstrakte Definitionen primordial waren und später durch konkrete ersetzt wurden, d.h. daß paradoxerweise mit zunehmender Formalisierung die dieser zugrunde liegenden Begriffe an Abstraktion verloren haben, denn vor der Definition der Zahl als Ding stand, bereits bei Euler, tief im 18. Jh., die Definition der Zahl als Relation.

> Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen von allen Arten, kömmt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art fest
>
> fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird), und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

(Euler 1771, S. 4 f.)

Da seit den 1940er Jahren der Begriff der Kategorie weitgehend den der objektbasierten Menge abgelöst hatte, bedeutet dieser Schritt also die Wiedereinführung einer abstrakten Zahldefinition, d.h. der Weg führte von Abstraktion über Konkretion zu Abstraktion. Der Grund für diese Absonderlichkeit dürfte, wie allgemein bekannt, darin zu suchen sein, daß spätestens nach Bolzano Mathematik und Metaphysik einander nichts mehr zu sagen hatten und daß man daher in der immer formaler werdenden Mathematik bewußt auf den zunächst noch nicht im Rahmen der formalen Logik exakt definierbaren Begriff des Verhältnisses im Sinne einer Relation verzichtete, denn die Relationentheorie als Teil der Ordnungstheorie gehört zu den jüngsten Teilgebieten der Mathematik und wurde erst durch die Bourbakis anerkannter Teil der letzteren.

3. Die Definition der Zahl als Objekt bzw. der Menge als "Zusammenfassung" bzw. "Gesamtheit" von Objekten verwischt, wie bereits gesagt, den Unterschied zwischen Zahl und Anzahl. Semiotisch gesehen ist nur die Zahl, nicht aber die Anzahl eine rein formale Entität, d.h. ein Mittelbezug, während die Anzahl, da sie ja das Ergebnis des Abzählens von Objekten ist (vgl. Toth 2015), semiotisch als Objektbezug fungiert. Wie in Toth (2014) dargestellt worden war, ist allerdings durch Zahl und Anzahl eine semiotisch vollständige, d.h. triadische Relation noch nicht erreicht, denn nur die Nummern, als zugleich arithmetisch und semiotisch fungierende Entitäten, besitzen Interpretantenbezüge, so daß also zwischen Zahl, Anzahl und Nummer eine generativ-semiosische Relation besteht, die man wie folgt formal darstellen kann

Zahl := (M)

↓

Anzahl:= $(M \rightarrow (M \rightarrow O))$

↓

Nummer: = $(M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$.

Literatur

Euler, Leonhard, Vollständige Anleitung zur Algebra. St. Petersburg 1771

Hausdorff, Felix, Grundzüge der Mengenlehre. Berlin 1914

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Minsinger, Franz, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Augsburg 1832

Toth, Alfred, Quantitative Ordnung von Qualität und qualitative Ordnung von Quantität. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Abzählen und Numerieren. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2015

7.5.2015